

CHAPITRE 5

LA THÉORIE DE CAUCHY

Le but de cette partie est d'établir une formule intégrale pour les fonctions holomorphes, c'est-à-dire de montrer que toute fonction holomorphe s'écrit comme l'intégrale d'une certaine fonction. Nous en déduisons l'analyticité de toute fonction holomorphe et aurons ainsi montré l'équivalence entre « fonction holomorphe » et « fonction analytique ».

Nous verrons que, pour une fonction donnée, le problème délicat de l'existence d'une primitive complexe sur un ouvert de \mathbb{C} n'est bien défini que conjointement à la notion de chemin dans cet ouvert. Nous verrons ensuite de quelle façon la régularité des fonctions admettant une primitive est liée à la régularité des chemins considérés.

Nous introduisons d'abord la notion de chemin du plan complexe, puis celle d'intégration le long de ces chemins. Nous étudierons ensuite en détail la relation entre cette dernière notion et la détermination de primitives pour une fonction d'une variable complexe.

I. Chemins de \mathbb{C}

I.1 Classe de chemins

Définition V.I.1.1 (Chemin).

Soient $I[a, b]$ un intervalle fermé de longueur non nulle de \mathbb{R} , \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} identifié à \mathbb{R}^2 et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ une application.

- (i) L'image $\gamma(I)$ (notée aussi parfois γ^*) est appelée *chemin* et γ est un paramétrage du chemin. On confondra souvent $\gamma(I)$, γ^* et son paramétrage γ .
- (ii) Un *lacet* est un chemin continu fermé c'est-à-dire dont l'extrémité et l'origine sont confondus : $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Un lacet est dit simple s'il n'admet d'autres points doubles $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Remarques:

- Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est un chemin, son image $im \gamma = \gamma([a, b])$ est le chemin géométrique qu'il définit et γ est une paramétrisation de $im \gamma$.

Figure I.1.1 – Des fonctions $y = f(x)$ et $x = g(y)$ peuvent être écrites sous la forme :

$$(a) \gamma(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}$$

$$(b) \gamma(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}$$

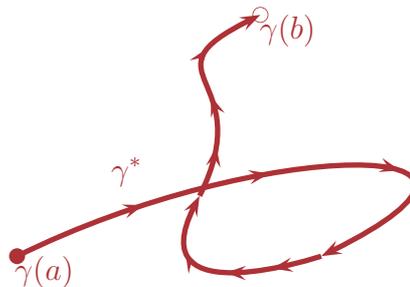
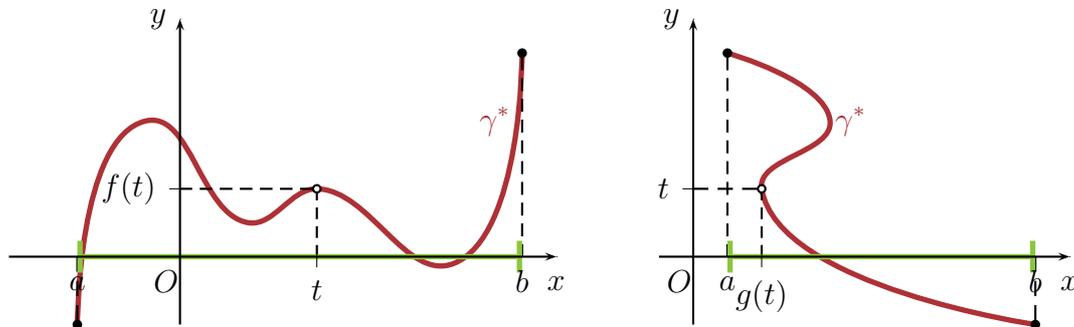


Figure I.1.2 – Chemin de \mathbb{C} possédant un point double

– Dire qu'un chemin est sans point double revient à dire que γ est injectif.

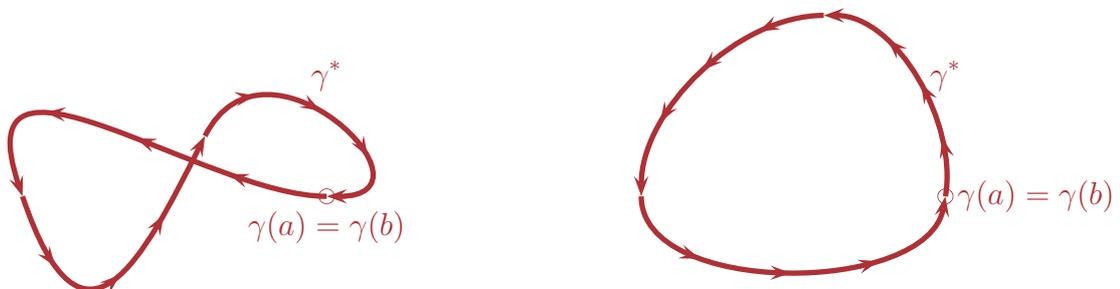


Figure I.1.3 – Lacets

Lemme V.I.1.2.

Soient $I[a, b]$ un intervalle fermé de longueur non nulle de \mathbb{R} , \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} identifié à \mathbb{R}^2 et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ une application.

- (i) Un chemin est dit continu (resp. continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, \mathcal{C}^1) s'il admet un paramétrage continu (resp. continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, \mathcal{C}^1).
- (ii) On dit que γ est continu et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si et seulement si γ est continu sur $[a, b]$ et s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que γ soit de classe \mathcal{C}^1 sur tous les intervalles fermés $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0 \dots n - 1$.¹
- (iii) Deux chemins $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ et $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathcal{U}$ sont dits \mathcal{C}^1 -équivalents s'il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.
Si, de plus, on peut trouver ϕ croissant, on dit que les chemins sont \mathcal{C}^1 -équivalents de même orientation.

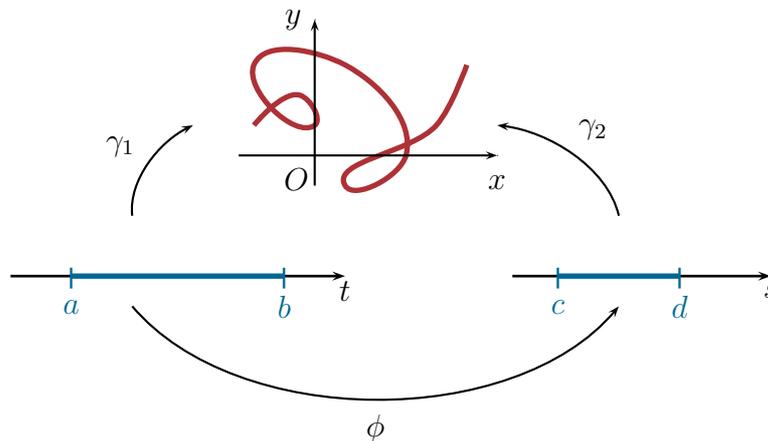


Figure I.1.4 – Chemins équivalents

La \mathcal{C}^1 -équivalence et la \mathcal{C}^1 -équivalence de même orientation sont deux relations d'équivalence. On notera $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}^+$ les classes d'équivalence relatives à ces relations.

De plus, en choisissant comme difféomorphisme, une bijection affine de $[a, b]$ dans $[0, 1]$, tout chemin est équivalent à un chemin dont la source est $[0, 1]$ ce qui simplifiera les notations.

$$\begin{aligned} \phi : [a, b] &\rightarrow [0, 1] && \iff && \phi^{-1} : [0, 1] &\rightarrow [a, b] && \text{(I.1.1)} \\ t &\mapsto \frac{1}{b-a}(t-a) && && t &\mapsto a + (b-a)t. \end{aligned}$$

Définition V.I.1.3 (Courbe).

Une courbe est une classe d'équivalence de chemins. Une courbe orientée est une classe d'équivalence de chemins pour la relation précédente avec ϕ strictement croissante.

1. Le plus souvent, on dira seulement « \mathcal{C}^1 par morceaux » au lieu de « continu et \mathcal{C}^1 par morceaux ».

I.2 Opérations sur les chemins

Définissons deux opérations naturelles sur les chemins :

Définition V.I.2.4.

(i) Si $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé à γ est le chemin

$$\gamma^- : \begin{array}{l} [0, 1] \mapsto \mathbb{C} \\ t \qquad \qquad \gamma(a + b - t). \end{array}$$

Dans ce cas, $im(\gamma^-) = im(\gamma)$.

(ii) Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \mapsto \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \mapsto \mathbb{C}$ sont deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$, le chemin juxtaposé² $\gamma_2 + \gamma_1$ ³ est le chemin défini sur l'intervalle $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ par

$$\gamma : \begin{array}{l} [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \mapsto \mathbb{C} \\ t \qquad \qquad \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases} \end{array}$$

Dans ce cas, $im(\gamma_2 + \gamma_1) = im(\gamma_2) \cup im(\gamma_1)$.

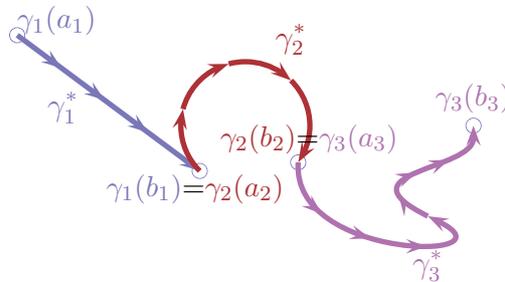


Figure I.2.5 – Juxtaposition des trois chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \mapsto \mathbb{C}$ et $\gamma_3 : [a_3, b_3] \mapsto \mathbb{C}$. On obtient ainsi un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux

Remarque: On peut aussi composer plusieurs chemins si le point final d'un chemin est égal au point de départ du chemin suivant. C'est d'ailleurs de cette manière que l'on construit un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux dans un domaine.

I.3 Exemples de chemins

(i) Si $a, b \in \mathbb{C}$ alors $\gamma : \begin{array}{l} [0, 1] \mapsto \mathbb{C} \\ t \qquad \qquad (1-t)a + tb \end{array}$ est un chemin de classe \mathcal{C}^1 , appelé segment orienté $[a, b]$. Il est de longueur $|b - a|$.

2. ou concaténé, ou somme...

3. Dans cet ordre comme pour une composée.

(ii) Pour a et b dans \mathbb{C} , le segment $[a, b]$ admet aussi pour paramétrage

$$\gamma : \begin{array}{c} [\alpha, \beta] \\ t \end{array} \mapsto \mathbb{C} \quad \frac{(\beta - t)a + (t - \alpha)b}{\beta - \alpha}.$$

(iii) Si $T \subset \mathbb{C}$ est un triangle dont les sommets z_1, z_2, z_3 sont numérotés dans le sens trigonométrique, on définit

$$\partial T = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1], \quad (\text{I.3.2})$$

le bord orienté du triangle dont une paramétrisation sur $[0, 1]$ peut être

$$\gamma : \begin{array}{c} [0, 1] \\ t \end{array} \mapsto \mathbb{C} \quad \begin{cases} (1 - 3t)z_1 + 3tz_2 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ (2 - 3t)z_2 + (3t - 1)tz_3 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ (3 - 3t)z_3 + (3t - 2)tz_1 & \text{si } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

(iv) Pour $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, le cercle orienté de centre a et de rayon r noté plus affinement $C_{a,r} = a + \mathbb{C}_r$ ou encore plus simplement $|z - a| = r$ est l'image du chemin

$$\gamma : \begin{array}{c} [0, 2\pi] \\ t \end{array} \mapsto \mathbb{C} \quad a + re^{it}.$$

Remarque: Les chemins $\gamma_n : [0, 2n\pi] \mapsto \mathbb{C}$ définis par $\gamma_n(t) = e^{i\frac{t}{n}}$ sont tous des paramétrisations distinctes du cercle unité.

II. Intégration le long de chemins de \mathbb{C}

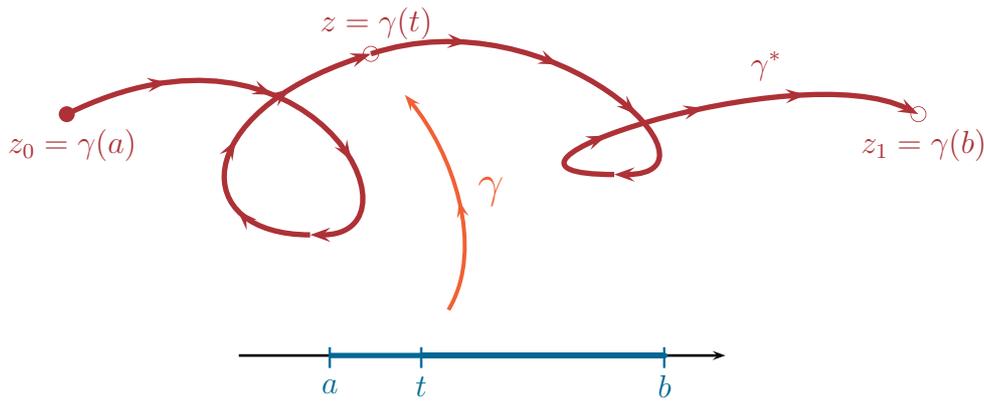
Le problème consiste à donner un sens à une intégrale complexe $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ où z parcourt un chemin γ reliant z_0 à z_1 . On pourrait, par exemple, considérer le segment $[z_0, z_1]$ mais le problème, contrairement à \mathbb{R} , c'est qu'il existe « beaucoup » de chemins reliant z_0 à z_1 dans \mathbb{C} . C'est de cette considération est riche de conséquences.

II.1 Intégrale curviligne

On appellera dorénavant *chemin* une classe de chemin \mathcal{C}^1 par morceaux et à dérivée bornée défini sur un intervalle $[a, b]$ fermé de \mathbb{R} c'est-à-dire que l'on considère une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que γ soit de classe \mathcal{C}^1 sur tous les intervalles fermés $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0 \dots n - 1$ et telle qu'il existe un réel M tel que $|\gamma'(t)| \leq M$ sur $[a, b]$ ⁴.

Soient alors \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ un chemin comme précisé ci-dessus. On peut définir l'intégrale de f le long de ce chemin en s'inspirant de la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction définie sur un

4. Ou tout au moins que chacune des dérivées à gauche et à droite de $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}[}$ existe pour $i = 0 \dots n - 1$.

Figure II.0.6 – Intégration le long de γ

segment réel et à valeur complexes. Pour ce faire, on découpe, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur en utilisant la subdivision $(t_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ ⁵ définie par $t_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$ et on lui associe la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(t_{n,k})) (\gamma(t_{n,k+1}) - \gamma(t_{n,k})) & t_{n,k+1} - t_{n,k} &= \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(t_{n,k})) \left((t_{n,k+1} - t_{n,k}) \gamma'(t_{n,k}) + o(t_{n,k+1} - t_{n,k}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n,k+1} - t_{n,k}) f(\gamma(t_{n,k})) \gamma'(t_{n,k}) + o(1). \end{aligned}$$

On reconnaît une somme de Riemann et il est tout naturel de donner la définition suivante :

Définition V.II.1.5 (Intégrale curviligne).

Soient \mathcal{U} un ouvert non vide de \mathbb{C} , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ un chemin à valeurs dans \mathcal{U} .

L'intégrale curviligne de f le long de γ est le nombre complexe :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (\text{II.1.3})$$

En notant $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ une subdivision telle que γ soit de classe continue \mathcal{C}^1 par morceaux sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0 \dots n-1$, on a précisément :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

5. Cette subdivision est indépendante de la subdivision, finie, $a_0 < \dots < a_n$. Construire une subdivision sur chaque intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ à la manière de Newton-Cotes permettrait de calculer une meilleure valeur approchée de cette intégrale mais tel n'est pas notre propos ici.

Remarques:

- Cette définition n'introduit donc aucune forme nouvelle d'intégration.
- En pratique cette intégrale curviligne se calcule en posant $z = \gamma(t)$ et $dz = \gamma'(t)dt$ avec t parcourant $[a, b]$ pour z parcourant $\gamma([a, b])$.

Exemples

- (i) Soient $f(z) = \frac{1}{z}$ et $\gamma : t \mapsto e^{it}$ une paramétrisation du cercle unité sur $[0, 2\pi]$. Comme f est holomorphe sur \mathbb{C}^* , elle y est en particulier continue.

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi.$$

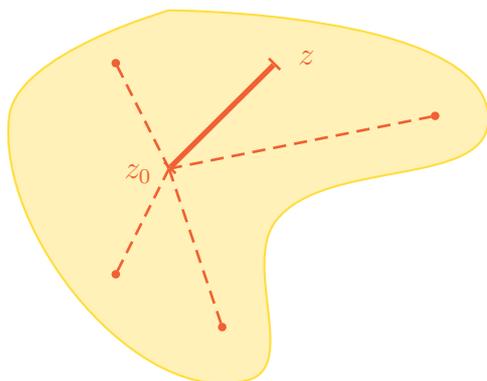
- (ii) Plus généralement, soient $f(z) = z^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \mathbb{C}$ et $\gamma = C_{\omega, r}$ une paramétrisation du cercle de centre ω et de rayon $r > 0$. On a :

$$\int_{|z-\omega|=r} z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} i n r e^{int} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

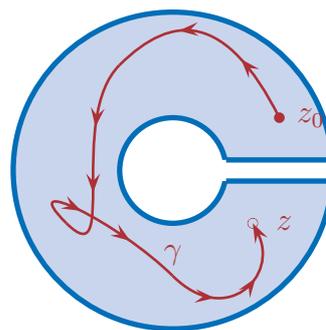
- (iii) Soient $z_0 \in \mathcal{U}$ un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction continue sur \mathcal{U} . Pour tout $z \in \mathcal{U}$, l'intégrale de f le long du segment $[z_0, z]$ est donnée par

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(z) dz = (z - z_0) \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt.$$

Comme on le verra plus tard, la fonction F est une bonne candidate à une primitive de f sur \mathcal{U} . Sur cet exemple simple, on voit bien ici le rôle tout naturel que vont jouer les ouverts étoilés et plus tard les ouverts simplement connexes.



(a) Segment dans un ouvert étoilé



(b) Chemin dans un ouvert simplement connexe

Figure II.1.7 – Ouverts de \mathbb{C}

- (iv) **Un exemple fondamental :** Soit $\gamma : t \mapsto \omega + r e^{it}$ une paramétrisation du cercle de centre ω et de rayon $r > 0$. Un simple changement de variable dans (ii), donne

$$\int_{|z-\omega|=r} (z - \omega)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit en particulier,
$$\int_{|z-\omega|=r} \frac{1}{z - \omega} dz = 2i\pi. \quad (\text{II.1.4})$$

On doit maintenant montrer que cette intégrale curviligne est bien définie, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du choix de la paramétrisation de la courbe orientée choisie.

Théorème V.II.1.6.

La valeur de $\int_{\gamma} f$ ne dépend que de $\tilde{\gamma}^+$

Preuve: Soient $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ et $\gamma_1 : [a_1, b_1] \mapsto \mathcal{U}$ deux éléments de $\tilde{\gamma}^+$ et $\phi : [a, b] \mapsto [a_1, b_1]$ un difféomorphisme strictement croissant tel que $\gamma = \gamma_1 \circ \phi$. Il suffit simplement de faire un changement de variable adéquat :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1 \circ \phi(t)) (\gamma_1 \circ \phi)'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(\phi(t))) \gamma_1'(\phi(t)) \phi'(t) dt && s = \phi(t) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s)) \gamma_1'(s) ds \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz. \end{aligned}$$

■

Proposition V.II.1.7.

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ un chemin de \mathcal{U} et f une fonction continue sur \mathcal{U} .

- (i) $\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f$.
(ii) Soient γ_1 et γ_2 tels que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Alors

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Preuve:

- (i) Soit γ^- le chemin défini par $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = a + b - t$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(z) dz &= - \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \gamma'(a + b - t) dt && u = a + b - t \\ &= \int_b^a f(\gamma(u)) \gamma'(u) du \\ &= - \int_a^b f(\gamma(u)) \gamma'(u) du \end{aligned}$$

- (ii) $\gamma_{[a,c]} = \gamma_1$ et $\gamma_{[c,b]} = \gamma_2$. La linéarité de l'intégrale de Riemann donne immédiatement le résultat. ■

Exemples :

- (i) **Intégration sur un triangle :** Si $T \subset \mathbb{C}$ est un triangle dont les sommets sont notés plus simplement A, B et C et numérotés dans le sens trigonométrique alors on a :

$$\int_{\partial ABC} f(z)dz = \int_{\widehat{AB}} f(z)dz + \int_{\widehat{BC}} f(z)dz + \int_{\widehat{CA}} f(z)dz,$$

où la notation \widehat{AB} représente le segment orienté AB .

- (ii) **Intégration sur un polygone :** Considérons le polygone $ABCD$ constitué des deux triangles adjacents $T_1 = ABD$ et $T_2 = BCD$. On a

$$\int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz = \int_{\partial P} f(z)dz,$$

puisque les deux intégrales, parcourues en sens inverse, $\int_{\widehat{BD}} f(z)dz$ et $\int_{\widehat{DB}} f(z)dz$ s'annulent mutuellement. Ce résultat, pourtant simple, sera fondamental pour la démonstration du théorème de Cauchy-Goursat [V.II.3.17](#).

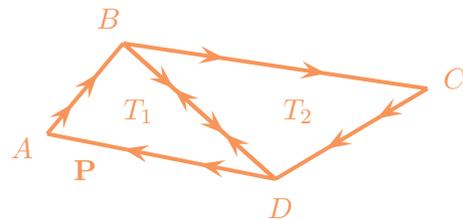


Figure II.1.8 – Intégration sur un polygone

- (iii) **Intégration sur un maillage :** D'une manière générale,

Lemme V.II.1.8 (Intégration sur un maillage).

Soit \mathcal{U} un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et $\Gamma \subset \mathcal{U}$ une partie de \mathcal{U} dont la frontière $\partial\Gamma$ est continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et entièrement contenue dans \mathcal{U} .

Si $\Gamma = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_i$ où les Γ_i forment une partition⁶ de Γ dont les frontières $\partial\Gamma_i$ sont continues, \mathcal{C}^1 par morceaux alors

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Gamma_i} f(z)dz.$$

Le lemme indique simplement qu'en parcourant toutes les frontières des éléments $\partial\Gamma_i$, chaque arête intérieure est parcourue deux fois dans deux sens opposés. En effet deux sommets voisins, définissent une arête qui est commune à deux éléments et deux seulement disons Γ_i et Γ_j . Lorsque l'on somme les intégrales sur tous les éléments du maillage, les deux intégrales sur l'arête commune s'annulent.

On fait ici la même remarque que précédemment : ce résultat sera fondamental pour la démonstration du théorème de Cauchy homotopique ([V.IV.2.31](#)) page 153.

6. On dit que la famille $\{\Gamma_i, 1 \leq i \leq n\}$ forme un maillage de Γ .

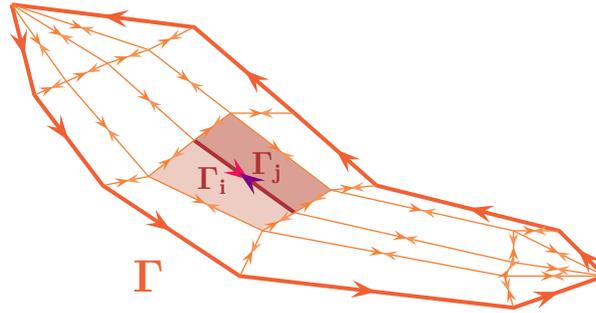


Figure II.1.9 – Intégration sur un maillage

La définition même de l'intégrale curviligne en [V.II.1.5](#) montre une relation entre l'intégrale d'une fonction le long d'un chemin et la longueur de ce dernier, lorsqu'elle est bien définie, ce qui est le cas pour les chemins par morceaux. Précisons ce lien, ce qui nous servira pour des majorations futures :

Définition V.II.1.9 (Longueur d'un chemin).

Soit $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux. La longueur de γ est définie par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Cette longueur ne dépend pas du paramétrage et elle est finie.

Preuve: γ étant \mathcal{C}^1 par morceaux, sa dérivée γ' est continue sur le compact $[a, b]$ donc bornée et on a

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq |b - a| \sup_{[a, b]} |\gamma'|.$$

La longueur est donc finie

Soit maintenant, une autre paramétrisation γ_1 de γ , de même orientation et $\phi : [a_1, b_1] \mapsto [a, b]$ un difféomorphisme strictement croissant tel que $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$. En particulier, $\phi' > 0$ sur $[a_1, b_1]$. Le même raisonnement qu'en [V.II.1.6](#) conduit à

$$\ell(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma_1'(t)| dt = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma(\phi(t))| \phi'(t) dt \stackrel{s=\phi(t)}{=} \int_a^b |\gamma'(s)| ds = \ell(\gamma).$$

Si ϕ est décroissant alors $b_1 < a_1$ et $\phi' < 0$ sur $[b_1, a_1]$. De plus, γ et γ_1 sont d'orientation opposés. On utilise encore [V.II.1.6](#) :

$$\ell(\gamma_1) = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma_1'(t)| dt = - \int_{a_1}^{b_1} |\gamma(\phi(t))| \phi'(t) dt \stackrel{s=\phi(t)}{=} - \int_b^a |\gamma'(s)| ds = \ell(\gamma).$$

■

Exemples :

◇ Considérons $C_{\omega, r}$ un cercle de centre ω et de rayon $r > 0$. On a :

$$\int_{|z-\omega|=r} |\gamma'| = \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt = 2\pi r.$$

On retrouve (heureusement) la formule du périmètre d'un cercle ce qui légitime (s'il en était besoin) les choix des notations faites au chapitre 4 page 87.

◇ Pour un segment $[z_0, z_1]$ paramétré sur $[0, 1]$ par $\gamma(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$, on a :

$$\int_{[z_0, z_1]} |\gamma'| = \int_0^1 |z_1 - z_0| dt = |z_1 - z_0|.$$

Les notations et définitions sont donc cohérentes⁷.

Proposition V.II.1.10 (Estimation standard).

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{C}$ une application continue sur \mathcal{U} .

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{\gamma} |f| \times \ell(\gamma). \quad (\text{II.1.5})$$

Remarques:

- La fonction f n'a besoin d'être continue que sur le support de γ c'est-à-dire $\gamma([a, b])$.
- de plus, comme γ est continue et $[a, b]$ compact, le dit support est aussi compact. La fonction f , continue sur $\gamma([a, b])$ y atteint donc ses bornes d'après le théorème des valeurs intermédiaires : le sup apparaissant dans (II.1.5) est donc un simple max.

Preuve: C'est une conséquence immédiate de la définition et des propriétés élémentaires de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{\gamma} |f| \times \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \sup_{\gamma} |f| \times \ell(\gamma). \end{aligned}$$

■

Corollaire V.II.1.11.

Soient γ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $im \gamma$ convergeant uniformément vers f sur $im \gamma$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Preuve: Il suffit d'appliquer (II.1.5) à la suite de fonctions $f - f_n$:

7. Pour peu que l'on en doute.

$$\left| \int_{\gamma} (f(z) - f_n(z)) dz \right| \leq \sup_{\gamma} |f - f_n| \times \ell(\gamma).$$

La convergence uniforme de f_n vers f finit le travail. ■

On remarquera que cette proposition est encore valable si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que sa limite sont continues sur un ensemble au moins connexes par arcs.

II.2 Recherche de primitives

Le théorème fondamental du calcul différentiel dans \mathbb{R} exprime le fait que chaque fonction continue $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ possède une primitive $F(x)$ et que $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. Nous allons étudier si ce résultat reste vrai dans \mathbb{C} .

Définition V.II.2.12 (Primitive).

Soit une fonction $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{C}$ définie sur un ouvert de \mathbb{C} . On dit que f admet une primitive complexe F sur \mathcal{U} s'il existe une fonction holomorphe $F : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant $F' = f$ sur \mathcal{U} .

Exemples :

- (i) Pour tout $n \neq -1$, $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$ est une primitive de z^n sur \mathbb{C} .
- (ii) $\cos z$ est une primitive de $-\sin z$ sur \mathbb{C} .
- (iii) $\sum \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ est une primitive de $\sum a_n (z-z_0)^n$ sur son disque de convergence.

De II.II.2.4 page 42, on déduit immédiatement, comme sur \mathbb{R} :

Lemme V.II.2.13.

Si l'ouvert \mathcal{U} est connexe et si $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{C}$ est holomorphe et admet des primitives, alors deux primitives de f sur \mathcal{U} diffèrent d'une constante.

On se donne donc un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} et une fonction continue sur \mathcal{U} . L'intégration le long des chemins de \mathcal{U} permet d'énoncer des conditions nécessaires, puis suffisantes, d'existence de primitives de f sur l'ouvert \mathcal{U} . premier résultat est une condition nécessaire d'existence.

Chaque fois qu'il en sera fait mention, on considèrera des chemins $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ tracés sur \mathcal{U} \mathcal{C}^1 par morceaux.

Théorème V.II.2.14 (Condition nécessaire).

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction continue sur \mathcal{U} .

Si f admet une primitive F sur \mathcal{U} alors,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En d'autres termes, la valeur de l'intégrale ne dépend que des extrémités du chemin et est égale à la variation de la primitive entre ces deux extrémités. En particulier, pour tout lacet de \mathcal{U} ,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (\text{II.2.6})$$

Preuve: Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ un chemin et F une primitive de f sur \mathcal{U} . D'après II.II.1.3 page 42,

$$(F \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t) \times F'(\gamma(t)) = \gamma'(t) \times f(\gamma(t)).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Comme F est continue sur $\text{im } \gamma$, la deuxième partie du théorème est claire avec $\gamma(a) = \gamma(b)$.

■

Exemples:

(i) Pour tout lacet γ continu et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathbb{C} ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, \quad \int_{\gamma} z^n dz = 0.$$

(ii) Comme $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2i\pi \neq 0$, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur \mathbb{C}^* et plus généralement, $z \mapsto \frac{1}{z - \omega}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{\omega\}$.

Le théorème suivant montre que la condition (II.2.6) est aussi suffisante pour l'existence d'une primitive sur un ouvert convexe⁸.

8. Même si l'on en n'a pas l'utilité ici, on pourrait aisément montrer ce théorème dans le cadre plus général d'un ouvert étoilé. Le prolongement que nous ferons plus loin aux ouverts simplement connexes englobera le cadre de ces ouverts.

Théorème V.II.2.15 (Critère d'intégrabilité sur un ouvert convexe).

Soient \mathcal{U} un ouvert convexe et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

Si, pour tout triangle T , plein fermé et inclus dans \mathcal{U} , on a $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$, alors f possède une primitive F sur \mathcal{U} donnée par

$$\forall \omega \in \mathcal{U}, \forall z \in \mathcal{U}, \quad F(z) = \int_{[\omega, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

En particulier, (II.2.6) est vérifiée pour tout chemin fermé dans \mathcal{U} .

Plus généralement, on dit que f admet une primitive locale au voisinage de chaque point de \mathcal{U} , si pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage ouvert V_{z_0} de z_0 contenu dans \mathcal{U} dans lequel $f|_{V_{z_0}}$ possède une primitive.

Bien entendu, si f possède une primitive dans \mathcal{U} , elle possède une primitive locale au voisinage de chaque point de \mathcal{U} , mais la réciproque est fautive en général. L'exemple le plus simple consiste à prendre $\mathcal{U} = \mathbb{C}^*$ et $f(z) = \frac{1}{z}$. Nous savons déjà qu'elle ne possède pas de primitive dans \mathcal{U} et pourtant le théorème V.II.2.15 montre qu'elle admet une primitive locale au voisinage de chaque point de \mathcal{U} .

Preuve: Soit $\omega \in \mathcal{U}$. Comme \mathcal{U} est convexe, il contient le segment $[\omega, z]$ pour tout $z \in \mathcal{U}$, la fonction F est bien définie. Considérons $z_0 \in \mathcal{U}$ et z dans un voisinage de z_0 . Par convexité, le triangle plein et fermé

$$T = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} [\omega, (1-t)z_0 + tz],$$

est inclus dans \mathcal{U} . Comme défini en (I.3.2), on a :

$$\partial T = [\omega, z] + [z, z_0] + [z_0, \omega].$$

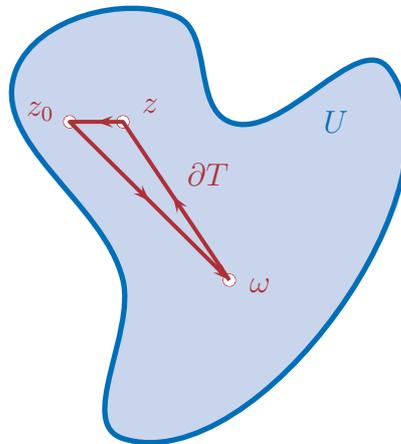


Figure II.2.10 – Condition suffisante d'intégrabilité dans un ouvert étoilé

Par hypothèse, on a $\int_{\partial T} f(\zeta) d\zeta = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& \int_{[\omega, z] + [z, z_0] + [z_0, \omega]} f(\zeta) d\zeta = 0 \\
& \int_{[\omega, z]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z, z_0]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_0, \omega]} f(\zeta) d\zeta = 0 \\
& F(z) + \int_{[z, z_0]} f(\zeta) d\zeta - F(z_0) = 0 \\
& F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \\
& = \int_{[z_0, z]} f(z_0) + (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta \\
& = f(z_0)(z - z_0) + \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta
\end{aligned}$$

Or, d'après (II.1.5),

$$\left| \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta \right| \leq \sup_{[z_0, z]} |f - f(z_0)| \times |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0,$$

par continuité de f sur le compact $[z_0, z]$ c'est-à-dire que $\int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta = o(z - z_0)$.

On a donc bien montré que

$$\forall z \in \mathcal{V}_{z_0}, \quad F(z) - F(z_0) = f(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0).$$

Comme f est continue sur \mathcal{U} , la fonction F est donc \mathbb{C} -différentiable en tout point z_0 de \mathcal{U} avec $F'(z_0) = f(z_0)$. ■

Il n'est pas toujours pratique de considérer un triangle sur lequel intégrer f . on utilise souvent, en pratique, une forme affaiblie de V.II.2.15 :

Corollaire V.II.2.16.

Soit \mathcal{U} un ouvert convexe \mathbb{C} .

Si, pour tout lacet γ continu et \mathcal{C}^1 par morceaux dans \mathcal{U} , on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ alors

f admet une primitive dans \mathcal{U} , par exemple, $F(z) = \int_{[\omega, z]} f(\zeta) d\zeta$.

II.3 Le théorème de Cauchy

Nous n'avons jusqu'à maintenant pas utilisé la notion d'holomorphic dans le problème de la construction de primitives. En particulier, dans le paragraphe précédent, les fonctions considérées étaient seulement supposées continues. Nous allons voir ici comment la notion d'holomorphic permet d'assurer que les intégrales le long de chemins fermés sont nulles, ce qui est le premier pas vers l'invariance des intégrales par déformation des chemins, que nous verrons plus tard.

Commençons par les conditions les moins contraignantes et limitons-nous au cas des triangles, pour lesquels l'élégante démonstration de Goursat⁹ permet de donner un sens

9. En toute légitimité, la preuve de Goursat s'appuie sur des rectangles. L'idée d'utiliser des triangles qui rend la preuve directement applicable à des domaines étoilés vient de Pringsheim. L'originalité de la méthode de Goursat est en fait de se libérer de la condition « f' continue » dans la démonstration initiale de Cauchy en utilisant la complétude de \mathbb{C} .

au découpage infini de triangles en sous-triangles si souvent utilisé dans les ouvrages de physique dans des contextes analogues. Notons que l'argument ultime de la démonstration repose sur la complétude du plan complexe et en fait une belle application de cette notion de topologie.

Théorème V.II.3.17 (Cauchy-Goursat).

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , S une partie finie de \mathcal{U} et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur \mathcal{U} et holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus S$.

Si ∂T est le bord orienté d'un triangle plein inclus dans \mathcal{U} , alors

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Preuve: Il est clair qu'il suffit de se limiter au cas où S est réduit à un singleton $S = \{\alpha\}$. Considérons un triangle T contenu dans \mathcal{U} :

- (i) Commençons par supposer que $\alpha \notin T$ c'est-à-dire f holomorphe sur tout un ouvert \mathcal{V} contenant T .

A l'aide des milieux de chacun des côtés, on découpe T en 4 triangles semblables δ_1 , δ_2 , δ_3 et δ_4 mais d'aire 4 fois plus petites.

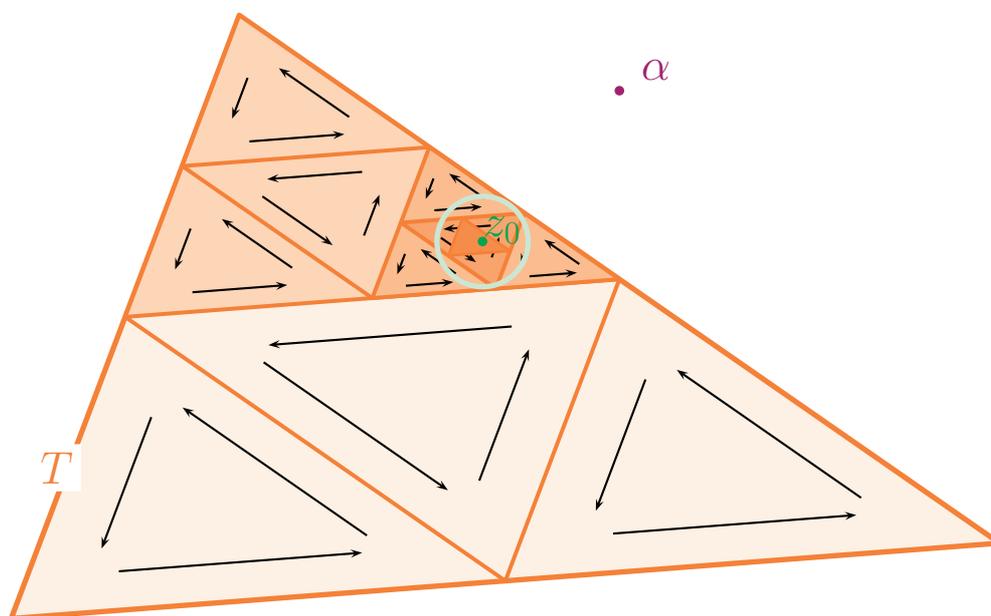


Figure II.3.11 – Découpage du triangle T lorsque $\alpha \notin T$

Remarquons que l'un au moins de ces 4 triangles, nommée T_1 , vérifie

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right|.$$

En effet, dans le cas contraire, nous aurions $\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\delta_i} f(z)dz \right| < 4 \times \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f(z)dz \right|$, ce qui est absurde.

On construit alors, par récurrence, à partir de T_1 une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de triangles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z)dz \right|.$$

On a, de plus,

$$\ell(\partial T_n) = \frac{1}{2^n} \ell(\partial T) \quad \text{et} \quad \text{diam}(T_n) = \frac{1}{4^n} \text{diam}(T),$$

c'est-à-dire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi construite est une suite décroissante pour l'inclusion de fermés dont le diamètre tend vers 0. D'après le théorème I.II.2.4 page 11 dans \mathbb{C} complet, l'intersection de ces triangles est réduite à un point $z_0 \in T$.

Utilisons maintenant la \mathbb{C} -différentiabilité de f en $z_0 \in \mathcal{V}$:

$$\forall z \in \mathcal{V}(z_0), \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0),$$

où ε est une fonction continue sur tout voisinage de z_0 et telle que $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = 0$.

$$\int_{\partial T_n} f(z)dz = f(z_0) \int_{\partial T_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial T_n} (z - z_0)dz + \int_{\partial T_n} \varepsilon(z)(z - z_0)dz. \quad (\text{II.3.7})$$

Les deux premières intégrales de (II.3.7) sont nulles d'après V.II.2.14 car les fonctions 1 et $z - z_0$ possèdent une primitive sur \mathcal{U} .

Par continuité de ε en z_0 , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|z - z_0| < \delta$ entraîne $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$. Pour n suffisamment grand pour que $T_n \subset \mathcal{D}(z_0, \delta)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} \varepsilon(z)(z - z_0)dz \right| \\ &\leq 4^n \times \varepsilon \times \max_{z \in T} |z - z_0| \times \ell(\partial T_n) \\ &\leq 4^n \times \varepsilon \times \text{diam}(\partial T_n) \times \ell(\partial T_n) \\ &\leq \underbrace{\text{diam}(\partial T) \times \ell(\partial T)}_{\text{Constant}} \times \varepsilon. \end{aligned}$$

Le dernier terme de (II.3.7) n'a donc d'autre choix que d'être nul. On a donc prouvé que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

- (ii) Si α est un des sommets de T , on le découpe en trois triangles T_1, T_2 et T_ε , α étant un sommet de T_ε , ε arbitrairement petit. On a alors, les bords étant toujours orientés,

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz + \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz.$$

D'après (i), comme T_1 et T_2 ne contiennent pas α , les deux premières intégrales sont nulles et la dernière peut être rendue arbitrairement petite grâce à la majoration

$$\left| \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq \ell(\partial T_\varepsilon) \sup_{\partial T_\varepsilon} |f|,$$

et à la continuité de f sur le compact ∂T_ε .

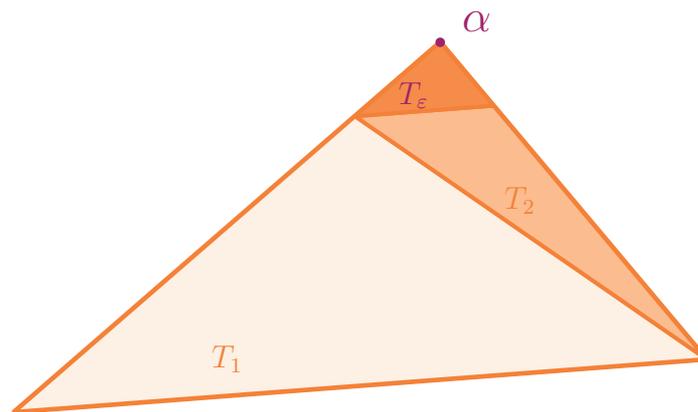


Figure II.3.12 – Découpage de T lorsque α est un sommet

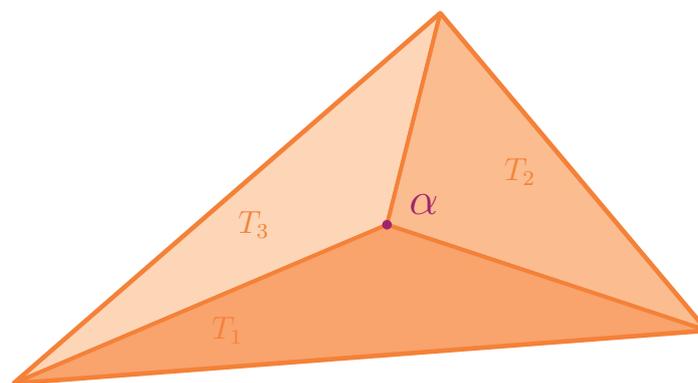


Figure II.3.13 – Découpage de T lorsque α appartient à l'intérieur de T

- (iii) Si α est intérieur à T , on commence par découper T en trois triangles délimités par les sommets de T et α . Il suffit alors d'appliquer le même raisonnement (trois fois) qu'en (ii).
- (iv) Enfin, si α est un point arbitraire de la frontière ∂T , on découpe le triangle T en deux triangles de sorte que α soit un sommet de chacun des deux triangles et on se retrouve encore dans le cas (ii).

■

Nous sommes maintenant en position de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

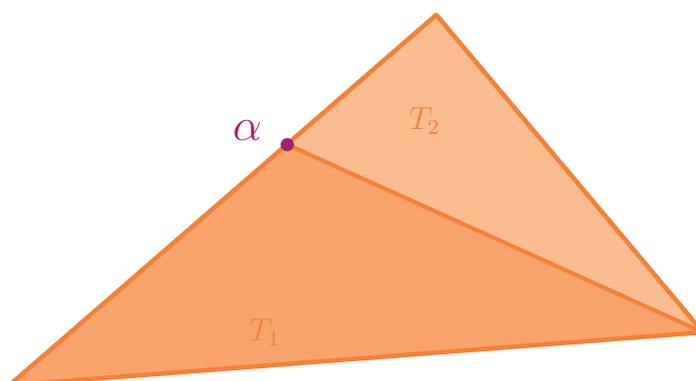


Figure II.3.14 – Découpage de T lorsque α appartient à la frontière de T

Théorème V.II.3.18 (Cauchy).

Soient \mathcal{U} un ouvert convexe de \mathbb{C} et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue sur \mathcal{U} et holomorphe sur \mathcal{U} sauf en un nombre fini de points ne contenant pas ω .

(i) f possède une primitive sur \mathcal{U} donnée par

$$\forall \omega \in \mathcal{U}, \forall z \in \mathcal{U}, \quad F(z) = \int_{[\omega, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

(ii) Pour tout lacet γ continu \mathcal{C}^1 par morceaux contenu dans \mathcal{U} , on a :

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

(iii) Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins continus \mathcal{C}^1 par morceaux contenus dans \mathcal{U} ayant mêmes extrémités, alors

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Preuve: Comme f est holomorphe sur \mathcal{U} (sauf en un nombre fini de points qu'il suffit d'éviter), son intégrale est nulle le long de tout triangle T inclus dans \mathcal{U} d'après V.II.3.17. D'après V.II.2.15, on a donc immédiatement (i) et (ii).

Pour démontrer (iii), il suffit d'appliquer (ii) au lacet $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$.

■

Remarques:

- (i) Le théorème V.II.3.18, ainsi que les autres propositions précédentes se réécrivent aisément dans un ouvert \mathcal{U} seulement supposé étoilé de centre, disons ω pour faciliter les notations. Le centre ω sera alors naturellement choisi pour la définition de F .
- (ii) L'assertion (ii) est une ample généralisation du théorème de Cauchy-Goursat V.II.3.17 qui nous disait que l'intégrale le long du bord d'un triangle était nulle pour toute

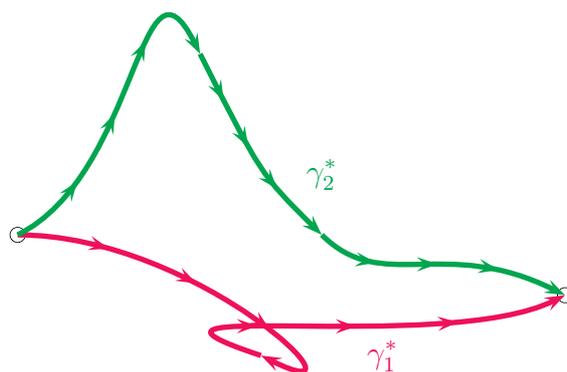


Figure II.3.15 – Deux chemins de mêmes extrémités forment un lacet

fonction holomorphe dans un voisinage du triangle plein.

Par exemple il s'applique aux rectangles dont les bords ne sont pas parallèles aux axes, ou aux parallélogrammes, ou aux rectangles en général, triangles, aux hexagones, aux ellipses, aux ovoïdes quelconques, en fait à n'importe quoi, à partir du moment que l'on peut trouver un ouvert étoilé incluant la figure et son bord et sur lequel la fonction est holomorphe.

Sans conditions sur l'ouvert \mathcal{U} , l'énoncé du théorème de Cauchy n'est pas correcte. En effet, si le théorème s'applique en particulier aux disques, aux demi-plans ou à l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ qui entre en jeu dans la discussion du Logarithme qui sont des ouverts étoilés sur lesquels toute fonction holomorphe admet une primitive holomorphe, ce n'est pas le cas de l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On verra plus loin que la question de l'existence des primitives est naturellement liée à une classe plus large d'ouverts : les ouverts *simplement connexes*.

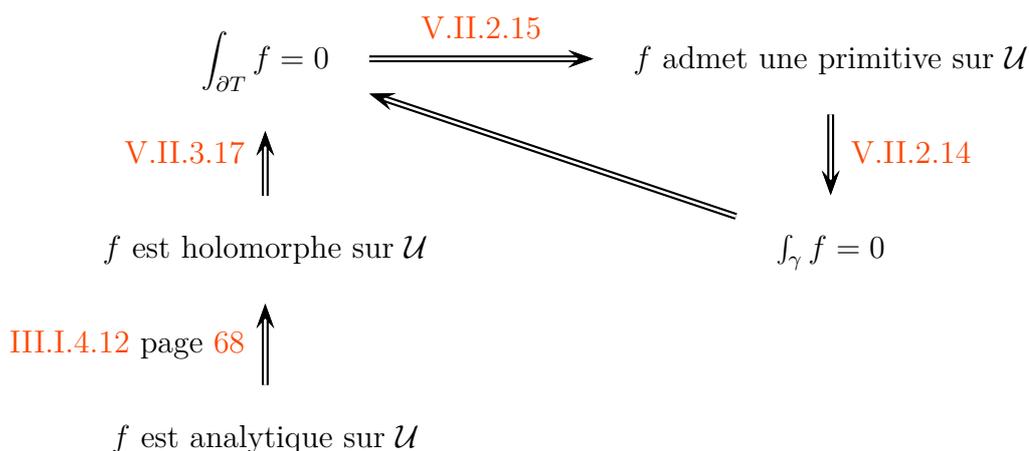
Considérons, par exemple, la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathcal{U} = \mathbb{C}^*$. La fonction $F : z \mapsto \text{Log } z$ est une primitive sur le domaine étoilé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mais pas sur \mathcal{U} . Pour le prouver¹⁰, il suffit de vérifier, par exemple, que la condition nécessaire V.II.2.14 n'est pas satisfaite pour le chemin $\gamma(t) = e^{it}$ qui est un exemple très important d'une intégrale le long d'un lacet donnant un résultat non nul :

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

- (iii) L'assertion (iii) indique que si \mathcal{U} est étoilé ou convexe et a et b sont deux éléments de \mathcal{U} alors pour toute fonction f holomorphe sur \mathcal{U} on peut parler (sans autre précision) de l'intégrale de f de a à b puisqu'elle ne dépend pas du chemin suivi pour aller de a à b . On verra que cette remarque peut s'étendre aux ouverts simplement connexes.

Le diagramme ci-dessous illustre la suite d'implications que nous venons de démontrer. On le complètera au fur et à mesure de notre avancée.

10. encore!



Comme tout point d'un ouvert possède un voisinage convexe (donc étoilé) contenu dans l'ouvert, par exemple un disque, nous en déduisons un résultat local d'existence de primitives pour des fonctions holomorphes.

Corollaire V.II.3.19.

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe sur \mathcal{U} . Alors, pour tout point $z_0 \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}_{z_0} de z_0 sur lequel f admet une primitive.

Exemple: La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{C}^*$ admet une primitive au voisinage de tout point de \mathcal{U} .

A ce stade, on peut déjà introduire la célèbre formule intégrale de Cauchy. La démonstration donnée ici est plus proche dans l'esprit à celle que fit Cauchy en son temps. En passant sur le côté historique, elle met en œuvre des idées que nous redévelopperons plus tard, notamment dans la manière de découper et faire glisser les chemins autour des singularités.

Théorème V.II.3.20 (Formule intégrale de Cauchy 1831).

Soit \mathcal{U} un domaine étoilé et γ une courbe fermée parcourant $\partial\mathcal{U}$ dans le sens positif. Soit f holomorphe dans un voisinage de l'adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ de \mathcal{U} .

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{II.3.8}$$

Preuve: Soit $z \in \mathcal{U}$ fixé. La fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$. On doit donc ôter ce point « chirurgicalement ».

Soient ω , le centre du domaine étoilé et a la projection de z à partir de ω sur $\partial\mathcal{U}$.¹¹ Le domaine $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \setminus [z, a]$ est donc étoilé pour le même centre ω .

La continuité de $f : \zeta \mapsto f(\zeta)$ en z implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(\zeta) - f(z)| \leq \varepsilon$ dès que $|\zeta - z| \leq \eta$.

11. si $z = \omega$, on choisit pour a un point arbitraire de $\partial\mathcal{U}$.

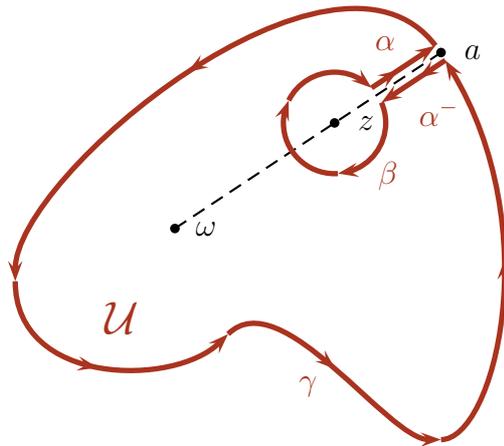


Figure II.3.16 – Formule intégrale de Cauchy

Notons β le cercle de centre z et de rayon η et α un segment joignant β à a . Nous allons démontrer que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \times \int_{\beta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + O(\varepsilon) = 2i\pi f(z) + O(\varepsilon). \quad (\text{II.3.9})$$

Pour montrer la première égalité, considérons le chemin $\delta = \gamma + \alpha - \beta + \alpha^-$. D'après V.II.3.18.(ii), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\alpha^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

La deuxième égalité se déduit de la continuité de f et de (II.1.5). En effet, on a tout d'abord,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\beta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| &= \left| \int_{\beta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \\ &\leq \sup_{|\zeta - z| = \eta} |f(\zeta) - f(z)| \times \sup_{|\zeta - z| = \eta} \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| \times \ell(\beta) \leq \varepsilon \frac{1}{\eta} 2\pi\eta = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Sachant depuis (II.1.4) que $\int_{\beta} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2i\pi$ et le réel ε ayant été choisi arbitrairement petit, on a donc démontré le théorème on faisant tendre ce dernier vers 0. ■

Toute la magie de cette démonstration réside dans le fait d'avoir pu contourner la *singularité* au point z en déformant suffisamment le contour de \mathcal{U} pour éviter celle-ci. Ceci fait, le théorème de Cauchy V.II.3.18 appliqué au lacet δ donne le résultat. Cette notion de déformation, continue, des chemins s'appelle une *homotopie*. La section IV, page 149 montrera comment le théorème de Cauchy V.II.3.18 s'insère tout naturellement dans ce cadre.

Le pouvoir extraordinaire de la formule de Cauchy (II.3.8) réside dans le fait que la variable z à gauche se retrouve à droite dans la simple forme $\frac{1}{\zeta - z}$. Toutes les belles

propriétés de cette dernière fonction se transmettent, à travers l'intégrale, à n'importe quelle fonction holomorphe. Elle va nous donner une suite de conséquences surprenantes. Mais étudions là tout d'abord et tout particulièrement :

III. Indice d'un lacet par rapport à un point

Nous introduisons ici la notion fondamentale d'indice d'un chemin fermé. Celle-ci illustre parfaitement la manière dont la théorie de l'intégration de Cauchy fournit en retour des résultats d'ordre topologique sur les chemins du plan complexe. La formule de Cauchy III.2.11 est une conséquence immédiate de la définition de l'indice et du théorème de Cauchy-Goursat V.II.3.17.

III.1 Indice et composantes connexes

Définition V.III.1.21 (Indice).

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un lacet continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, tel que $z_0 \notin \gamma([a, b])$. On pose alors

$$\text{Ind}_\gamma z_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}.$$

qui est l'indice du lacet γ par rapport au point z_0 .

Proposition V.III.1.22.

Avec les notations précédentes, l'indice vérifie :

- (i) $\text{Ind}_\gamma z_0 \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Pour tout $r > 0$, le lacet $\gamma_n : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{int}$ a pour indice $\text{Ind}_{\gamma_n} z_0 = n$.
- (iii) La fonction $z_0 \mapsto \text{Ind}_\gamma z_0$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus ([a, b])$ et nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus ([a, b])$.
- (iv) Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets de même origine, alors

$$\text{Ind}_{\gamma_1 + \gamma_2} z_0 = \text{Ind}_{\gamma_1} z_0 + \text{Ind}_{\gamma_2} z_0$$

Preuve:

- (i) Comme $e^\omega = 1$ si et seulement si $\omega \in 2i\pi\mathbb{Z}$ d'après IV.II.5.5.2 page 101, il suffit de montrer que $\exp(2i\pi \text{Ind}_\gamma z_0) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus im \gamma$.
Par définition, pour tout chemin $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continu \mathcal{C}^1 par morceaux,

$$\text{Ind}_\gamma z_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt.$$

Pour $t \in [a, b]$, on définit la fonction

$$\phi(t) = \exp \left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds \right).$$

Il suffit alors de montrer que $\phi(b) = 1$. Sauf peut être sur un ensemble fini¹² $S \subset [a, b]$,

$$\phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \phi(t).$$

puis

$$\phi'(t)(\gamma(t) - z_0) - \gamma'(t)\phi(t) = 0,$$

qui est le numérateur de la dérivée de la fonction $\Psi : t \mapsto \frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z_0}$. Cette dérivée est nulle sur $[a, b] \setminus S$, où S est fini, c'est donc une fonction constante d'après II.II.2.4 page 42.

Le chemin γ étant fermé, $\gamma(a) = \gamma(b)$ entraîne $\phi(b) = \phi(a) = 1$.

(ii) Un calcul direct fournit le résultat :

$$\text{Ind}_{\gamma_n} z_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \frac{r i n e^{int}}{r e^{int}} dt = n. \quad (\text{III.1.10})$$

(iii) La fonction $z_0 \mapsto \text{Ind}_{\gamma} z_0$ définie en (III.1.10) est continue sur $\mathbb{C} \setminus ([a, b])$ d'après les théorèmes sur les intégrales à paramètres dont l'intervalle d'intégration est compact. Elle est, de plus, à valeurs dans \mathbb{Z} donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus ([a, b])$ d'après I.IV.1.20 page 20.

De plus $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \right| \leq \sup_{z \in \gamma} \frac{1}{|z - z_0|} \times \ell(\gamma)$. D'où

$$\lim_{|z_0| \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 0.$$

Sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus ([a, b])$, l'indice est donc nul.

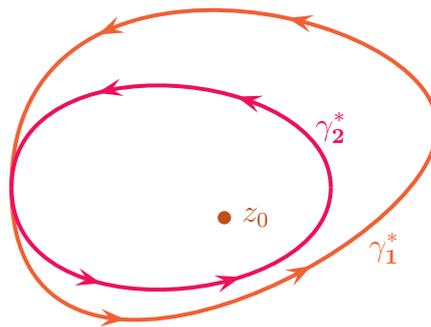


Figure III.1.17 – Indice d'un point par rapport à deux lacets de même origine

(iv) Il suffit de composer les lacets avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$ et appliquer V.II.1.7. ■

Exemple: Une conséquence de (ii) et (iii) est que pour toute paramétrisation orientée d'un cercle de centre z_0 , on a :

12. en chaque point de raccordement a_i de la subdivision de $[a, b]$ où γ n'est pas dérivable tout en restant continu.

$$\text{Ind}_{|z-z_0|=r}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - z_0| < r \\ 0 & \text{si } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

De manière plus générale,

Définition V.III.1.23.

Si γ est un lacet simple, on pose

$$\begin{aligned} \text{Int}(\gamma) &= \{z \in \mathbb{C} / |\text{Ind}_\gamma z| \geq 1\}, \\ \text{Ext}(\gamma) &= \{z \in \mathbb{C} / |\text{Ind}_\gamma z| = 0\}. \end{aligned}$$

S'il semble clair qu'un cercle du plan complexe partage ce dernier en deux composantes connexes dont l'une est bornée (l'intérieur du cercle) et l'autre pas (l'extérieur), ce n'est pourtant pas si évident¹³ que cela à démontrer. On le doit à Jordan :

Théorème V.III.1.24 (Jordan).

Tout lacet γ , simple, partage le plan en deux domaines dont il est la frontière. En d'autres termes, le complémentaire de γ est la réunion de deux ouverts connexes disjoints : le domaine intérieur, qui est borné, et le domaine extérieur, qui est non borné.

Corollaire V.III.1.25.

$$\mathbb{C} = \text{Int}(\gamma) \cup \gamma^* \cup \text{Ext}(\gamma).$$

L'assertion [V.III.1.22.\(ii\)](#) montre que si $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ est un chemin fermé et si $z_0 \notin \text{im } \gamma$, l'indice de γ par rapport à z_0 est le nombre de tours décrits par $\gamma(t)$ autour de z_0 quand t parcourt $[a, b]$, c'est-à-dire encore la variation d'une détermination continue de l'argument de γ entre ses deux bornes. Pour le voir, ramenons le point z_0 à l'origine et considérons le lacet $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ donné sous sa forme polaire $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ où les fonctions ρ et θ sont des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^1 . Calculons alors l'indice de l'origine :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + i\rho(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i\theta'(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\ln \rho(b) - \ln \rho(a) \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\theta(b) - \theta(a) \right). \quad \text{or } \rho(a) = \rho(b) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\theta(b) - \theta(a) \right). \end{aligned}$$

$$g(\varsigma) = \begin{cases} \frac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z} & \text{si } \varsigma \neq z \\ f'(z) & \text{si } \varsigma = z. \end{cases}$$

Par définition de la dérivée, g est donc continue sur \mathcal{U} et holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$. Elle remplit donc les conditions du théorème de Cauchy-Goursat [V.II.3.17](#). D'où, en substituant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(\varsigma) d\varsigma &= 0 \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z} d\varsigma &= 0 \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma &= \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\varsigma - z} d\varsigma \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma &= f(z) \times \text{Ind}_{\gamma} z. \end{aligned}$$

■

On notera au passage l'intérêt de l'énoncé de [V.II.3.17](#) autorisant les fonctions à admettre des points singuliers en nombre fini.

La section suivante est le point central de la théorie de Cauchy. Elle montre comment se libérer de la condition « convexe » voire « étoilé » sur l'ouvert \mathcal{U} , pourvu que le chemin considéré soit homotope¹⁴ à un point dans \mathcal{U} . Les hypothèses restrictives seront alors reportées sur les chemins considérés et non sur l'ouvert.

IV. Théorème de Cauchy homotopique

L'extension de la formule de Cauchy dans le cadre des ouverts non convexes nécessite des hypothèses topologiques, que l'on peut formuler en termes de « déformation continue » des courbes.



Figure IV.0.19 – Déformation continue d'un lacet en cercle

14. pour l'instant qui peut se déformer continument jusqu'à...

IV.1 Homotopie

Définition V.IV.1.27 (Homotopie).

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ deux chemins continus définis sans perte de généralités sur un même intervalle.

(i) On dit que γ_0 et γ_1 sont *homotopes* dans \mathcal{U} s'il existe

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \quad (IV.1.12)$$

$$(t, s) \quad H(t, s) = \gamma_s(t),$$

continue des deux variables, dite *homotopie de chemins*, telle que

$$\forall t \in [a, b], \quad H(t, 0) = \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad H(t, 1) = \gamma_1(t). \quad (IV.1.13)$$

(ii) Si γ_0 et γ_1 ont même extrémité, on dit qu'ils sont *homotopes strictement* dans \mathcal{U} lorsque l'application H définie en (IV.1.12) vérifie (IV.1.13) et la condition

$$\forall s \in [0, 1], \quad H(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{et} \quad H(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b). \quad (IV.1.14)$$

(iii) Si γ_0 et γ_1 sont des lacets, on dit qu'ils sont *homotopes au sens des lacets* dans \mathcal{U} l'application H définie en (IV.1.12) vérifie (IV.1.13) et la condition

$$\forall s \in [0, 1], \quad H(a, s) = H(b, s). \quad (IV.1.15)$$

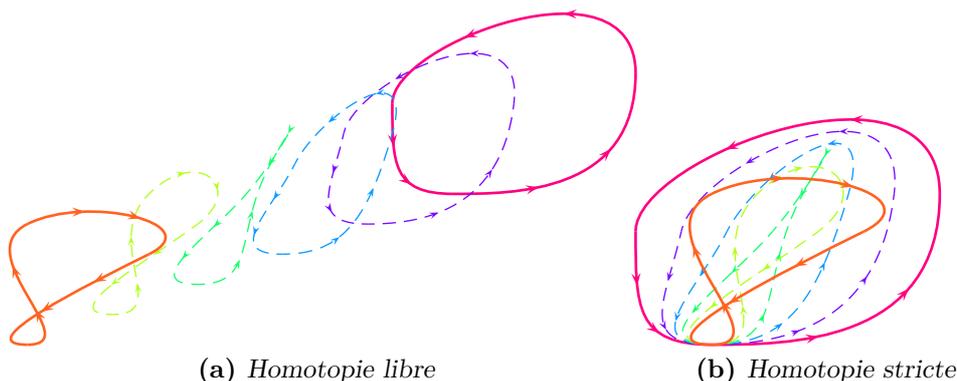


Figure IV.1.20 – Homotopies de lacets

Remarques:

- La condition « dans \mathcal{U} » est essentielle pour définir l'homotopie : deux chemins peuvent être homotopes dans \mathcal{U} et ne pas l'être dans $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ par exemple.
- La condition (IV.1.15) n'est qu'une reformulation de IV.1.14 dans le cas des lacets, c'est-à-dire

$$\forall s \in [0, 1], \quad t \mapsto H(s, t) \text{ est un lacet.}$$

Exemples:

- (i) Tout chemin de \mathcal{U} ouvert est homotope à un point dans \mathcal{U} .
 (ii) Dans \mathbb{C} deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ continus sont toujours homotopes. Il suffit de prendre

$$H : \begin{matrix} [a, b] \times [0, 1] & \mapsto & \mathcal{U} \\ (t, s) & & H(t, s) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t). \end{matrix}$$

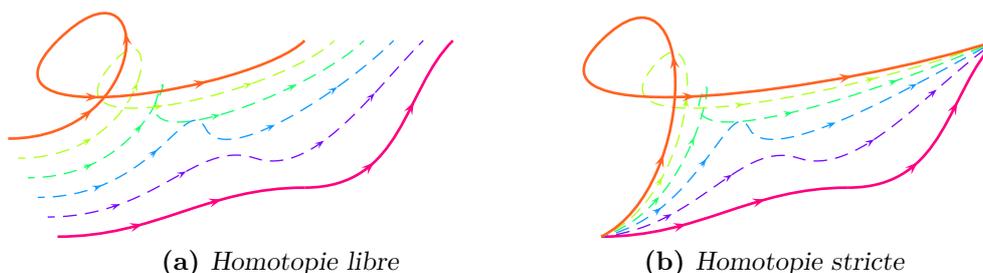


Figure IV.1.21 – Homotopies de chemins

- (iii) Dans \mathbb{C} tout lacet est homotope au cercle unité $\mathcal{D}(0, 1)$, lui-même homotope à un point (0, par exemple).

$$H : (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \mapsto H(t, s) = (1 - s)e^{it}$$

est une homotopie de lacets dans \mathbb{C} du cercle sur 0.

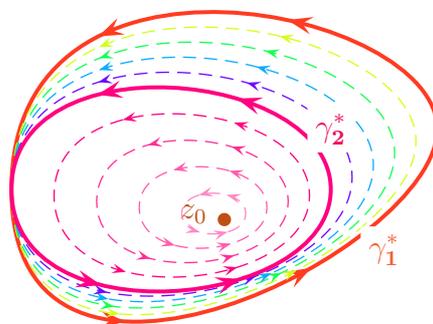


Figure IV.1.22 – Dans \mathbb{C} , deux lacets sont toujours homotopes entre eux et à un point

- (iv) Dans une couronne¹⁵, deux chemins continus ne sont pas nécessairement homotopes.

Proposition V.IV.1.28.

L'homotopie de chemins, l'homotopie stricte de chemins, et l'homotopie de lacets sont des relations d'équivalence dans l'ensemble des chemins continus de \mathcal{U} .

Preuve: On démontre la propriété pour des chemins homotopes. Le raisonnement est identique pour l'homotopie stricte et l'homotopie des lacets.

15. ou plus généralement, sur un ouvert non simplement connexe ... mais nous verrons ça plus loin.

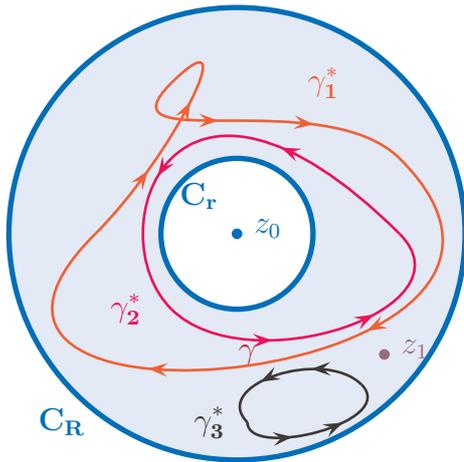


Figure IV.1.23 – Homotopie dans une couronne

- (i) γ_1 et γ_2 sont homotopes mais pas de même orientation.
- (ii) γ_3 n'est homotope ni à γ_1 , ni à γ_2 .
- (iii) γ_3 est homotope à z_1 mais pas γ_1 , ni γ_2 .
- (iv) γ_1 et γ_2 sont homotopes aux deux frontières C_r et C_R mais pas γ_3 .
- (v) Aucun des chemins γ_1 , γ_2 , γ_3 pas plus que z_1 n'est homotope à z_0 .

- (i) La relation est trivialement réflexive.
- (ii) si γ_0 est un chemin homotope à un autre nommé γ_1 alors il existe une application $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ continue vérifiant (IV.1.13). Si on pose \tilde{H} définie par $\tilde{H}(t, s) = H(t, 1-s)$, \tilde{H} est continue sur $[a, b] \times [0, 1]$ est vérifiée $\tilde{H}(\cdot, 0) = \gamma_1$ et $\tilde{H}(\cdot, 1) = \gamma_0$: γ_1 est homotope à γ_0 , la relation est symétrique.
- (iii) Si γ_0 et γ_1 sont homotopes, γ_1 et γ_2 aussi d'homotopie respective H_1 et H_2 alors l'application H définie par

$$\forall s \in [0, 1], \quad H(t, s) = \begin{cases} H_0(2t, s) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ H_1(2t - 1, s) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

est continue sur $[a, b] \times [0, 1]$ et définit une homotopie de γ_0 sur γ_2 . La relation est transitive.

La relation d'homotopie sur les chemins est donc bien une relation d'équivalence. ■

On peut alors définir correctement l'homotopie sur les classes d'équivalence avec conservation de l'orientation comme en V.II.1.6 page 130 :

Définition V.IV.1.29 (Classes de chemins homotopes).

On dira que deux classes $\overline{\gamma_0^+}$ et $\overline{\gamma_1^+}$ sont strictement homotopes si et seulement si $\overline{\gamma_0^+}$ et $\overline{\gamma_1^+}$ contiennent deux chemins $g_0, g_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ strictement homotopes.

Légitimons un peu cette définition : soit $H : (t, s) \in [a, b] \times [0, 1] \rightarrow H(t, s) \in \mathcal{U}$ l'homotopie stricte des chemins g_0 et g_1 .

Pour toute autre paire $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1 : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathcal{U}$ de chemins de $\overline{\gamma_0^+} \times \overline{\gamma_1^+}$ de même source $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, on a

$$\tilde{g}_0 = g_0 \circ \phi_0 \quad \text{et} \quad \tilde{g}_1 = g_1 \circ \phi_1$$

où $\phi_0, \phi_1 : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ sont les difféomorphismes associés au changement de variables. La fonction

$$\tilde{H}(t, s) = H\left((1-s)\phi_0(t) + s\phi_1(t), s\right)$$

est continue sur $[\tilde{a}, \tilde{b}] \times [0, 1]$ et vérifie

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, 0) &= H(\phi_0(t), 0) = g_0(\phi_0(t)) = \tilde{g}_0(t) \\ \text{et } \tilde{H}(t, 1) &= H(\phi_1(t), 1) = g_1(\phi_1(t)) = \tilde{g}_1(t). \end{aligned}$$

C'est bien une homotopie stricte entre \tilde{g}_0 et \tilde{g}_1 .

Corollaire V.IV.1.30.

Si γ_0 et γ_1 sont des chemins de \mathcal{U} définis sur un même intervalle $[a, b]$, équivalents de même orientation, alors ils sont strictement homotopes dans \mathcal{U} .

Preuve: Si ϕ est le difféomorphisme de reparamétrisation avec $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$, on pose

$$H(t, s) = \gamma_0((1-s)t + s\phi(t)).$$

L'application H est une bien une homotopie stricte entre γ_0 et γ_1 . ■

Ceci permet de définir l'homotopie pour les classes d'équivalence de chemins avec conservation de l'orientation.¹⁶

IV.2 Le théorème

Théorème V.IV.2.31 (Cauchy-Goursat).

Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ deux chemins continus, \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit f est holomorphe sur \mathcal{U} ^a.

- (i) Si γ_0 et γ_1 ont les mêmes extrémités et sont strictement homotopes dans \mathcal{U} ou
- (ii) Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets, homotopes au sens des lacets dans \mathcal{U}

Alors,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \quad (\text{IV.2.16})$$

En particulier, si γ_0 est un lacet homotope à un point,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0.$$

^a. ou si f est continue sur \mathcal{U} et holomorphe sur \mathcal{U} privé d'un ensemble fini

Un lacet homotope à un point est dit *homotopiquement trivial*.

Preuve:

¹⁶. et de ne plus nous occuper de celles-ci.

- (i) Supposons pour commencer que γ_0 et γ_1 soient deux chemins continus, \mathcal{C}^1 par morceaux et de mêmes extrémités $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ et $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. On se place donc dans le cadre de l'homotopie stricte de chemins et on considère l'application H définie en (IV.1.12) et vérifiant (IV.1.13) et (IV.1.14).

Effectuons une subdivision à pas constant $\frac{1}{n} \times \frac{b-a}{n}$ de $[a, b] \times [0, 1]$ en posant :

$$\forall k, j \in \{1, \dots, n\}, \quad s_j = \frac{j}{n} \quad \text{et} \quad t_k = a + j \frac{b-a}{n}.$$

On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme étant l'interpolation affine de H sur tout pavé

$$I_{j,k} = [t_k, t_{k+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$$

par : $\forall (t, s) \in I_{j,k}$,

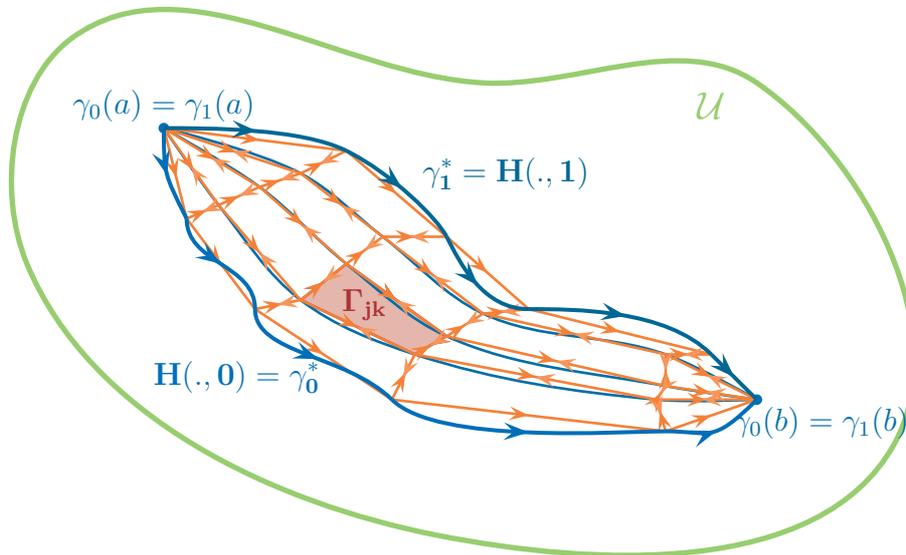
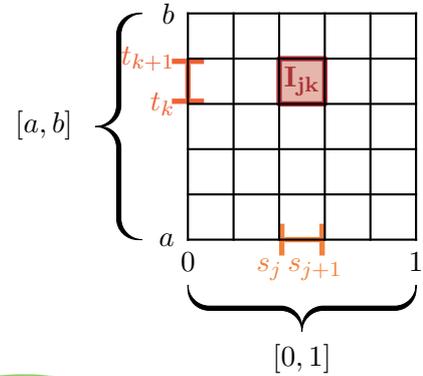


Figure IV.2.24 – Invariance de l'intégrale sur deux chemins homotopes

$$\begin{aligned} H_n(t, s) &= \frac{1}{\frac{b-a}{n^2}} \left[(s_{j+1} - s) \left((t_{k+1} - t) H(t_k, s_j) + (t - t_k) H(t_{k+1}, s_j) \right) + \right. \\ &\quad \left. (s - s_j) \left((t_{k+1} - t) H(t_k, s_{j+1}) + (t - t_k) H(t_{k+1}, s_{j+1}) \right) \right] \\ &= \frac{n^2}{b-a} \left[(s_{j+1} - s)(t_{k+1} - t) H(t_k, s_j) + (s_{j+1} - s)(t - t_k) H(t_{k+1}, s_j) + \right. \\ &\quad \left. (s - s_j)(t_{k+1} - t) H(t_k, s_{j+1}) + (s - s_j)(t - t_k) H(t_{k+1}, s_{j+1}) \right] \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, H_n est continue sur $I = [a, b] \times [0, 1]$. Montrons qu'elle converge uniformément vers H sur I .

En remarquant que

$$(s_{j+1} - s)(t_{k+1} - t) + (s_{j+1} - s)(t - t_k) + (s - s_j)(t_{k+1} - t) + (s - s_j)(t - t_k) = \frac{b-a}{n^2},$$

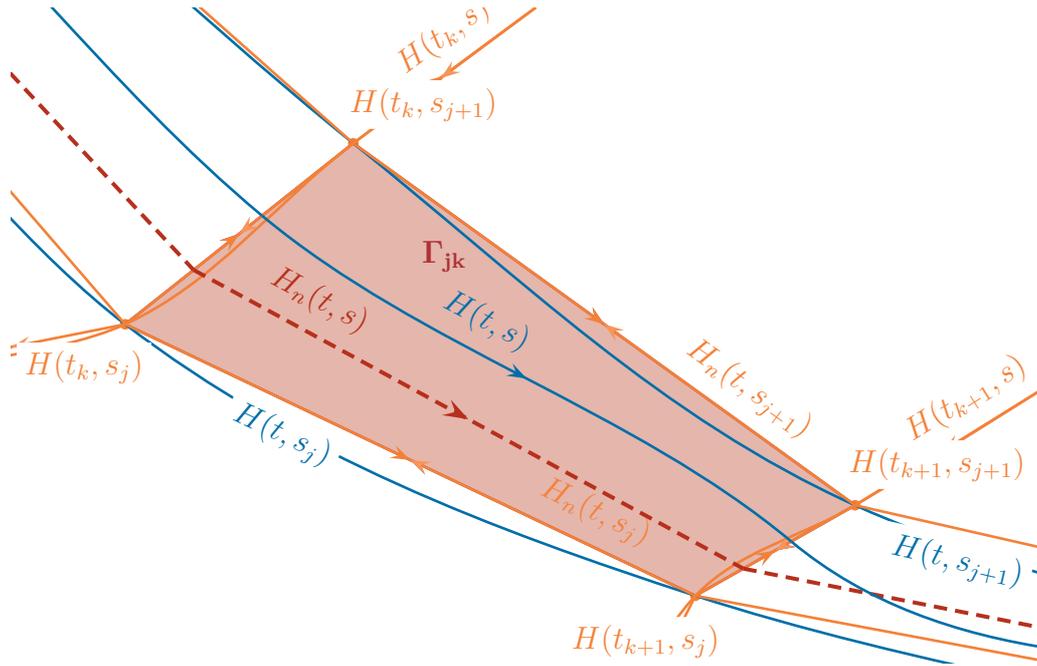


Figure IV.2.25 – $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers H sur I

on a :

$$\begin{aligned}
 |H_n(t, s) - H(t, s)| &= \frac{n^2}{b-a} \left| (s_{j+1} - s)(t_{k+1} - t)(H(t_k, s_j) - H(t, s)) \right. \\
 &\quad + (s_{j+1} - s)(t - t_k)(H(t_{k+1}, s_j) - H(t, s)) \\
 &\quad + (s - s_j)(t_{k+1} - t)(H(t_k, s_{j+1}) - H(t, s)) \\
 &\quad \left. + (s - s_j)(t - t_k)(H(t_{k+1}, s_{j+1}) - H(t, s)) \right| \\
 &\leq \frac{n^2}{b-a} \left[(s_{j+1} - s)(t_{k+1} - t) + (s_{j+1} - s)(t - t_k) \right. \\
 &\quad \left. + (s - s_j)(t_{k+1} - t) + (s - s_j)(t - t_k) \right] \\
 &\quad \times \sup_{((t', s'), (t, s)) \in I_{jk}} |H(t', s') - H(t, s)| \\
 &= \sup_{((t', s'), (t, s)) \in I_{jk}} |H(t', s') - H(t, s)|.
 \end{aligned}$$

Or, dans le pavé I_{jk} , deux points sont nécessairement à une distance inférieure à la longueur d'une diagonale, ici $\delta_n = \frac{\sqrt{1 + (b-a)^2}}{n}$. D'où

$$\forall (t, s) \in I_{jk}, \quad |H_n(t, s) - H(t, s)| \leq \sup_{|(t', s') - (t, s)| \leq \delta_n} |H(t', s') - H(t, s)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme H est une fonction continue sur l'ensemble compact $[a, b] \times [0, 1]$, elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine I.III.2.14 page 16 donc il existe un réel $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$|(t', s') - (t, s)| < \eta \implies |H(t', s') - H(t, s)| < \varepsilon.$$

Fixons alors n suffisamment grand pour que $\delta_n < \eta$. Soit $(s, t) \in I$, il existe $j, k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $(s, t) \in I_{jk}$. On obtient alors

$$\left| H_n(t, s) - H(t, s) \right| \leq \varepsilon,$$

et la convergence uniforme de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers H sur I .

En particulier, pour n suffisamment grand, la continuité uniforme permet aussi d'assurer que

$$\sup_{|(t', s') - (t, s)| \leq \delta_n} \left| H(t', s') - H(t, s) \right| \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist} \left(H([a, b] \times [0, 1]), \partial U \right) = D.$$

Autrement dit, les quadrilatères $\Gamma_{j,k} = (H(t_k, s_j), H(t_{k+1}, s_j), H(t_{k+1}, s_{j+1}), H(t_k, s_{j+1}))$ sont inclus strictement dans \mathcal{U} , leur bord, formé par les fonctions $t \mapsto H_n(s, t)$ et $s \mapsto H_n(s, t)$, est continu, \mathcal{C}^1 par morceaux¹⁷. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy V.II.3.18.(ii) sur un voisinage convexe de chaque quadrilatère, on obtient :

$$\forall j, k \in \{1, \dots, n\}, \quad \int_{\Gamma_{j,k}} f(z) dz = 0.$$

D'après le lemme V.II.1.8 page 131, en faisant la somme sur j et k et en tenant compte de l'orientation, on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Gamma_{j,k}} f(z) dz &= 0 \\ \int_{H_n(t,0)} f(z) dz - \int_{H_n(t,1)} f(z) dz &= 0 \\ \int_{H_n(t,0)} f(z) dz &= \int_{H_n(t,1)} f(z) dz. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.17})$$

Considérons enfin le chemin fermé

$$\gamma^k = [H_n(t_{k+1}, 0), H_n(t_k, 0)] + \gamma_{0[t_k, t_{k+1}]}.$$

Pour n assez grand, le disque (convexe) de centre $\gamma_0(t_k)$ et de rayon D est strictement contenue dans \mathcal{U} et contient γ_k . On peut donc y appliquer une nouvelle fois le théorème de Cauchy V.II.3.18.(ii) :

$$\int_{\gamma^k} f(z) dz = 0.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma^k} f(z) dz &= 0 \\ \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{H_n(t,0)} f(z) dz &= 0 \\ \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{H_n(t,0)} f(z) dz. \end{aligned}$$

Le même argument montre aussi que $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{H_n(t,1)} f(z) dz$.

Finalement, on a montré que :

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

17. Contrairement aux fonctions $t \mapsto H(s, t)$ et $s \mapsto H(s, t)$. C'est ici qu'apparaît la nécessité d'introduire la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et toute la subtilité de la continuité uniforme sur un compact qui entraîne la convergence uniforme.

- (ii) Considérons maintenant le cas de deux lacets homotopes γ_0 et γ_1 et H une application continue sur I définie par (IV.1.12) et vérifiant (IV.1.13) et (IV.1.15).

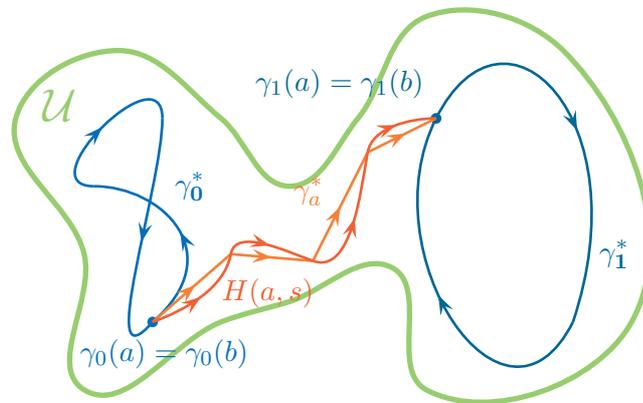


Figure IV.2.26 – Invariance de l'intégrale sur deux lacets homotopes

L'application $s \mapsto H(a, s)$ est continue, à valeurs dans \mathcal{U} ouvert, donc on peut l'approcher uniformément par une fonction affine par morceaux dont l'image est incluse dans \mathcal{U} et telle que $\gamma_a(0) = H(a, 0)$ et $\gamma_a(1) = H(a, 1)$. Par exemple ¹⁸,

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \gamma_n(t) = \frac{n}{b-a} \left[(t_{k+1} - t)H(a, t_k) + (t - t_k)H(a, t_{k+1}) \right].$$

On peut donc construire un chemin \mathcal{C}^1 -équivalent et de même orientation que le chemin $\gamma_a + \gamma_1 + \gamma_a^-$, qui est strictement homotope à γ_0 .

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{\gamma_a} f(z) dz + \int_{\gamma_1} -f(z) dz + \int_{\gamma_a^-} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz. \end{aligned}$$

C'est le résultat espéré et la fin de la démonstration ■

Remarque: Bien que γ_1 et γ_2 soient supposés continus, \mathcal{C}^1 par morceaux, l'homotopie H , elle, est seulement supposée continue, d'où la nécessité d'introduire la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Et dans le cas de l'homotopie libre ?

Attention, dans le théorème V.IV.2.31, l'expression (IV.2.16) n'est vraie que pour des lacets ou des chemins strictement homotopes. Il est clair que si elle l'était aussi pour tous chemins librement homotope, on démontrerait du même coup que toutes les intégrales sur \mathbb{C} seraient nulles puisque tous les chemins ouverts sont homotopes à un point, donc les primitives aussi et donc toutes les fonctions holomorphes, ce qui n'est pas.

Le théorème IV.2.16 montre que la valeur d'une intégrale curviligne dans \mathbb{C} ne dépend que des extrémités. Le cas des chemins librement homotopes montre, lui, que deux primitives diffèrent d'une constante. Montrons-le :

18. C'est exactement le même raisonnement que pour approcher H par $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mais en plus simple.

Considérons donc deux chemins homotopes pas nécessairement strictement. En reprenant les notations précédentes, les applications $s \mapsto H(a, s)$ et $s \mapsto H(b, s)$ sont continues, à valeurs dans \mathcal{U} .

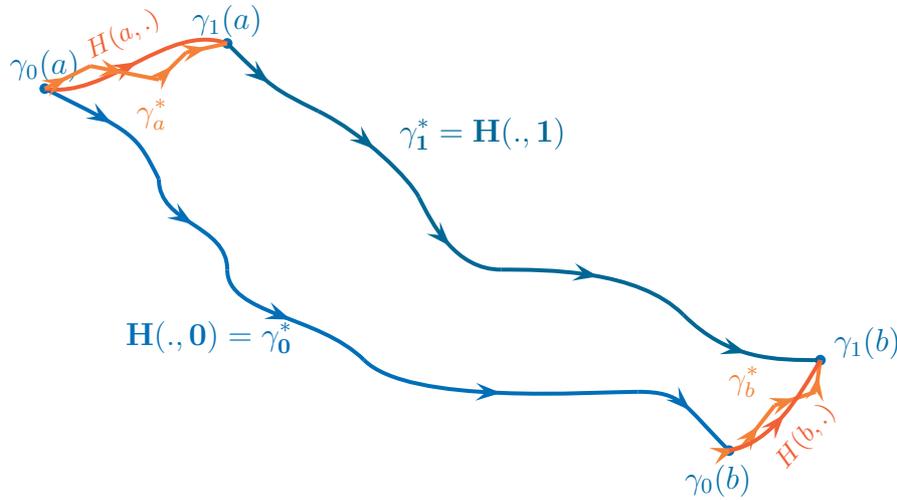


Figure IV.2.27 – Les intégrales d’une fonction holomorphe sur deux chemins homotopes diffèrent d’une constante

On construit donc les chemins continus, \mathcal{C}^1 par morceaux γ_a et γ_b comme précédemment. Les chemins $\gamma_a + \gamma_1 + \gamma_b^-$ et γ_0 sont donc strictement homotopes et on a :

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_a + \gamma_1 + \gamma_b^-} f(z) dz$$

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz = \underbrace{\int_{\gamma_a} f(z) dz - \int_{\gamma_b} f(z) dz}_{\text{Constant}}$$

Lorsque γ_0 et γ_1 sont strictement homotopes, $\int_{\gamma_a} f(z) dz - \int_{\gamma_b} f(z) dz = 0$ et on retrouve (IV.2.16).

Une des conséquences du théorème de Cauchy-Goursat V.IV.2.31 est qu’une intégrale le long d’un certain contour peut aussi être noté $\int_{z_A}^{z_B} f(z) dz$ où z_A et z_B sont les affixes des extrémités A et B du chemin puisque l’intégrale ne dépend pas du chemin suivi. On pourra retenir l’image suivante : finalement, pour une fonction holomorphe dans \mathcal{U} , le chemin est un élastique fixé par deux punaises dans le plan déformable à souhait mais en restant dans \mathcal{U} sans pour autant que les déformations de l’élastique modifie la valeur de l’intégrale.

Corollaire V.IV.2.32.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ_0, γ_1 deux lacets continus et \mathcal{C}^1 par morceaux, homotopes dans $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$. Alors,

$$\text{Ind}_{\gamma_0} z_0 = \text{Ind}_{\gamma_1} z_0.$$

Preuve: Il suffit simplement d'appliquer le théorème de Cauchy homotopique V.IV.2.31 et l'expression (IV.2.16) avec f la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \times \frac{1}{z - z_0}$ et les lacets γ_0 et γ_1 . ■

IV.3 Simple connexité

Définition V.IV.3.33 (Ouvert simplement connexe).

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit qu'il est simplement connexe s'il est connexe et si deux chemins continus γ_0 et γ_1 de mêmes extrémités sont toujours strictement homotopes.

De manière équivalente, \mathcal{U} est simplement connexe si et seulement si il est connexe et tout lacet est homotope au sens des lacets à un point.

Intuitivement, un ouvert est simplement connexe s'il est connexe sans trous¹⁹ au sens de I.IV.3.29 page 25. Nous allons ici préciser certains points avancés au chapitre 1, section IV.. La première idée est que la simple connexité est un prolongement naturel de la connexité par arcs. Pour garder une image, s'il est toujours possible de tirer un tuyau d'arrosage à travers les arbres de son jardin (connexité par arcs), cela est beaucoup moins évident, une fois revenu à son point de départ de tirer le dit tuyau par la même extrémité (simple connexité) sans qu'il ne s'enroule autour d'un arbre (les trous)

Exemples

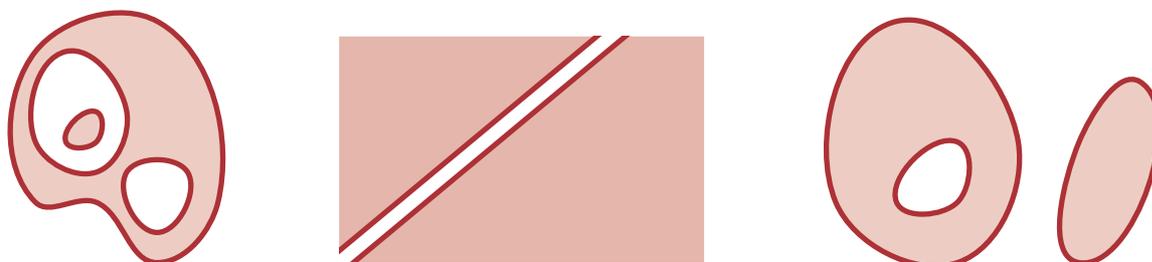


Figure IV.3.28 – Connexe, connexe par arcs, simplement connexe, étoilé, convexe

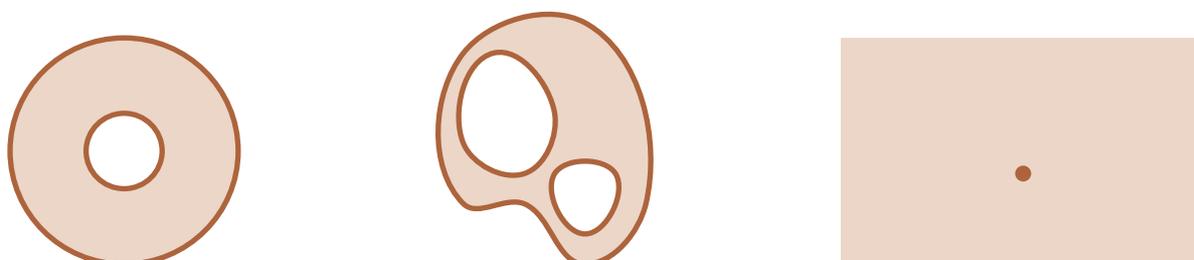


Figure IV.3.29 – Connexe, connexe par arcs, simplement connexe, étoilé, convexe

Le théorème de Cauchy-Goursat peut alors se réécrire dans un ouvert simplement connexe, les conditions sur les lacets et chemins étant transférées à l'ouvert :

19. Lorsque nous verrons l'identification entre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et la sphère de Riemann, on pourra plus simplement dire qu'un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$ est simplement connexe si et seulement si son complémentaire est connexe.

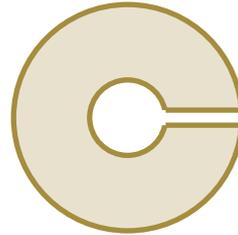
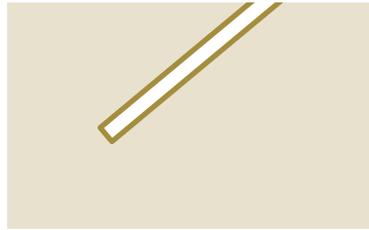


Figure IV.3.30 – Connexe, connexe par arcs, simplement connexe, étoilé, ~~convexe~~

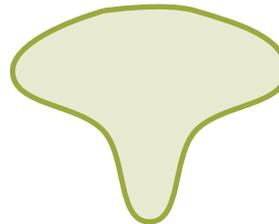


Figure IV.3.31 – Connexe, connexe par arcs, simplement connexe, étoilé, ~~convexe~~

Théorème V.IV.3.34 (Cauchy-Gauss dans un ouvert simplement connexe).

Soient \mathcal{U} un ouvert simplement connexe et f est holomorphe sur \mathcal{U} ^a.

- (i) Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins de \mathcal{U} continus, \mathcal{C}^1 par morceaux ayant les mêmes extrémités alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

- (ii) Si γ est un lacet de \mathcal{U} , continu et \mathcal{C}^1 par morceaux alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

^a. ou si f est continue sur \mathcal{U} et holomorphe sur \mathcal{U} privé d'un ensemble fini

Preuve: Dans \mathcal{U} simplement connexe, les chemins de mêmes extrémités sont strictement homotopes et les lacets homotopes à un point. Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Gauss homotopique V.IV.2.31. ■

Donnons enfin un condition d'intégrabilité semblable V.II.2.15 page 136 mais dans un ouvert simplement connexe :

Théorème V.IV.3.35 (Primitives dans un ouvert simplement connexe).

Soient \mathcal{U} un ouvert simplement connexe et f est holomorphe sur \mathcal{U} ^a. Alors f admet une primitive complexe F sur \mathcal{U} .

^a. ou si f est continue sur \mathcal{U} et holomorphe sur \mathcal{U} privé d'un ensemble fini

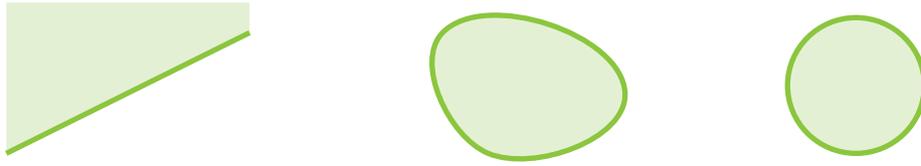


Figure IV.3.32 – Connexe, connexe par arcs, simplement connexe, étoilé, convexe

Preuve: Soit $z_0 \in \mathcal{U}$. D'après I.IV.3.31 page 26, pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe un chemin continu $\gamma_{z_0, z}$, \mathcal{C}^1 par morceaux reliant z_0 à z . On pose alors

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta.$$

Soit alors $h \in \mathcal{D}(0, r)$ avec $r > 0$ suffisamment petit pour que le segment $[z, z+h]$ soit inclus dans \mathcal{U} . Soit alors γ_{z+h, z_0} , un chemin continu, \mathcal{C}^1 par morceaux reliant $z+h$ à z_0 dans \mathcal{U} . Dans un ouvert simplement connexe, la lacet $\Gamma = \gamma_{z_0, z} + [z, z+h] + \gamma_{z+h, z_0}$ est homotope à un point. D'où,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta &= 0 \\ \int_{\gamma_{z_0, z}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_{z+h, z_0}} f(\zeta) d\zeta &= 0 \\ F(z) - F(z+h) &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta \\ &= f(z)h + \int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \end{aligned}$$

La fin de la démonstration est identique à celle de V.II.2.15, la continuité de f sur le compact $[z, z+h]$ entraînant $\int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta = o(h)$ puis

$$F(z+h) - F(z) = f(z)h + o(h),$$

pour tout $h \in \mathcal{D}(0, r)$ avec f est continue sur \mathcal{U} . La fonction F est donc \mathbb{C} -différentiable en tout point z de \mathcal{U} avec $F'(z) = f(z)$. ■

Théorème V.IV.3.36 (Formule intégrale de Cauchy homotopique).

Soient \mathcal{U} un ouvert et γ un lacet continu, \mathcal{C}^1 par morceaux et homotope à un point dans \mathcal{U} .

Si f est une fonction holomorphe sur \mathcal{U} alors, pour tout point $z \in \mathcal{U} \setminus im \gamma$, on a :

$$f(z) \times \text{Ind}_{\gamma} z = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (\text{IV.3.18})$$

Preuve: On reprend les mêmes notations qu'en V.III.2.26 page 148 et notamment la fonction g , définie sur \mathcal{U} par

$$g(\varsigma) = \begin{cases} \frac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z} & \text{si } \varsigma \neq z \\ f'(z) & \text{si } \varsigma = z. \end{cases}$$

Comme γ est homotope à un point dans \mathcal{U} et que g remplit les conditions du théorème de Cauchy-Goursat [V.IV.3.34](#), on a :

$$\int_{\gamma} g(\varsigma) d\varsigma = \int_{\gamma} \frac{f(\varsigma) - f(z)}{\varsigma - z} d\varsigma = 0.$$

La fin de la preuve est identique et donne la formule ([IV.3.18](#)). ■